Licenciatura en Matemáticas y en Computación,
Universidad de Guanajuato
Tarea 6 de Álgebra Lineal II: Subespacios cíclicos.
lunes 8 de octubre de 2012
Fecha de entrega: lunes 15 de octubre de 2012.

En los siguientes ejercicios E denota un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo K.

1. Sea $f \in \mathrm{End}(E)$ y $u \in E \backslash \{0\}$. Si

$$m_u(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{s-1}x^{s-1} + x^s$$

es el polinomio mínimo de f en u y $\mathbf{B} = \{f^i(u) | i \in \{0, \ldots, s-1\}\}$, sabemos que el conjunto $\mathbf{B}$ es base de G, y que el subespacio $G = \langle \mathbf{B} \rangle$ es f-invariante.

   a) Calcule la matriz de $f|_G$ en la base $\mathbf{B}$ (es la matriz de la página 168 del texto).

   b) Pruebe que $m_u(x)$ es también el polinomio característico de $f|_G$.

2. Sea $p(x) \in K[x]$ el polinomio

$$p(x) = (-1)^n (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0)$$

Demuestre que si $\dim(E) = n$ entonces existe $f \in \mathrm{End}(E)$ tal que su polinomio característico es $p(x)$.

Definición: Si $\alpha \in E$ es un vector cualquiera y $T \in \mathrm{End}(E)$, el **subespacio T-cíclico generado por** α es el subespacio $Z(\alpha; T)$ de los vectores de la forma $g(T)\alpha$, $g \in K[x]$. Si $Z(\alpha; T) = E$ entonces se dice que α es un vector cíclico de T.

3. Demuestre que $Z(\alpha; T)$ es igual a la intersección de todos los subespacios T-invariantes W que contienen a α.

4. Sea $\dim(E) = 2$. Demostrar que un vector no nulo, que no es vector propio de T, es un vector cíclico de T. Demostrar luego que o T tiene un vector cíclico o T es un múltiplo escalar del operador identidad.